4) $\frac{\Lambda(t,\lambda)}{t\lambda} \Rightarrow \nu$ ($\exists$ такая с.в. ν)

$F(x) = \mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\right)$, $\overline{F}(x) = 2\mathbb{E}\Phi\left(\frac{\max(0,x)}{\sqrt{\nu}}\right) - 1$;

$\underline{F}(x) = 2\left(1 - \mathbb{E}\Phi\left(\frac{-\min(0,x)}{\sqrt{\nu}}\right)\right)$

Таким образом, можно аппроксимировать: $\mathbb{P}(P(t)<x) \approx$
$\approx \mathbb{E}\Phi\left(\frac{\log x - \log P(0)}{\sigma\sqrt{\lambda t \nu}}\right)$; $\mathbb{P}(\overline{P}(t)<x) \approx 2\mathbb{E}\Phi\left(\frac{\max(0, \log x - \log P(0))}{\sigma\sqrt{\lambda t \nu}}\right) - 1$

$\mathbb{P}(\underline{P}(t)<x) \approx 2\left(1 - \mathbb{E}\Phi\left(\frac{-\min(0, \log x - \log P(0))}{\sigma\sqrt{\lambda t \nu}}\right)\right)$

Наводит мысль, что идеальную систему не подберёшь. Мы получили нечто с дисперсией, но с более тяжелыми хвостами, чем у нормального.

Рассмотрим статистику за много лет: заменим t на n (число активных периодов); $\Lambda(n,\lambda) = \sum \Lambda_i$ – норсв

$\Rightarrow \frac{\Lambda(n,\lambda)}{n\lambda} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ (ЗБЧ) (ибо $\mathbb{E}\Lambda_i = \lambda$); глядя на теорию, получаем, что распределение становится нормальным.

Получили сложную, но гибкую модель.

Зачёт: письменно, 1 час (3 теор. и задача) Д-во не надо. Потом – беседа с преподом.

КОНЕЦ

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ЛЕКЦИЯ #01

10.02.10

Хохлов Юрий Степанович

1. Гихман, Скороход. Введение в теорию СП (1964 – лучше)

2. Розанов. Введение в теорию СП.

3. Миллер, Панков. Теория СП в примерах и задачах.

§0 Основные сведения из Т.В.

Опр. Вер. пр-во, с.в. и ее распред., с. вектор и его распределение, функц. преобр. с.в., $\mathbb{E}$, $\mathbb{D}$, cov, коэф. корр. и их св-ва условные р-е, условное м.о.

Стандартные распределения:

– Бернулли	– Равномерное
– Биномиальное	– Гамма
– Пуассона	– Показательное
– Геометрическое	– Нормальное.

§1 Случайная функция и её распределения.

п.1 Примеры случ. функций.

1. В фикс. моменты времени на некой метеорологич. станции замеряют температ. воздуха. Получаем $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$

2. На телеф. станции замеряют число звонков на фикс. номер. $N(t)$ – число звонков от 0 до t.

3. На бирже трейдер следит за изм. цены некого товара. Если цена меняется очень часто, то $\xi(t)$ – цена товара в момент t.

X – множество значений; есть некоторый параметр, который разделяет измерения, $t \in T$. Т.к. на величину влияет большое количество ф-в, то естественно предположить, что измеряется случайная величина. Если мы хотим рассматривать все эти измерения как единый объект, то необходимо, что бы все с.в. были заданы на одном вер. пр-ве.

п.2 Случайная функция и её распределения.

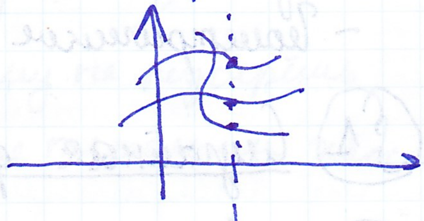
Опр. Случ. ф-ей, заданной на параметрическом мн-ве T, наз-ся набор с. в. $(\xi(t),\ t \in T)$, заданных на одном и том же вер. пр-ве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и принимающих значение в нек-м множестве X

Формально, $\xi : \Omega \times T \to X$, т. е. $\xi = \xi(t, \omega) \in X$. На множестве X выделена сигма-алгебра подмножеств, т.е. мы имеем измер. пр-во $(X, \mathcal{B})$. $\xi(t) : \Omega \to X$ — измеримая ф-я.

<u>Пример.</u> Пусть $X = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{B}$ — бор. сигма-алгебра

Зафиксируем $\omega \in \Omega$; результат — $\xi(\cdot, \omega)$ (ф-я от t при фикс. ω) — реализация с.ф. ξ (выборочная траектория или просто траектория)

Фиксируем $t \in T$; получим $\xi(t, \cdot)$ — сечение случ. ф-ии в t



t

Фиксируем несколько $t_1, \dots, t_n \in T$ — получим случ вектор $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ — n-мерное сечение сл. ф. ξ.

Пусть, далее, $X = \mathbb{R}^1$. Тогда распределение случайного вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ можно описать с помощью ф-ии распределения, т.е. $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \dots, \xi(t_n) < x_n)$ — конечномерное распределение случайной функции.

$\{F_{t_1 \dots t_n}, \forall n \geq 1, \forall t_1 \dots t_n \in T\}$ — набор конечномерных распределений с.ф. ξ

<u>Опр.</u> Распределением (в слабом смысле) с.ф. $(\xi(t),\ t \in T)$ называется её набор конечномерных распределений.

<u>Пример.</u> Пусть $T = [0, 1]$, $X = \mathbb{R}$, р-м событие $A = \{\sup_t \xi(t) \leq a\}$ — это, увы, через НКМС не определяется.

• НКМС не определяет то, для чего "требуется" ~~одно~~ континуум точек: непрерывность, дифференцируемость...

Опр. Все с.ф. ~~каждая~~ заданные на одном вер. пр-ве и принимающие значения на мн-ве X, наз-ся эквивалентными, если $\forall t \in T$ $\mathbb{P}(\xi(t) \neq \eta(t)) = 0$.

Легко показать, что экв. процессы имеют один. НКМР

• Эквивалентные ф-ии считаем неразличимыми.

Пример. $T=[0,1]$, $x \in \mathbb{R}$, $\eta \sim R[0,1]$, $\xi(t) \equiv 0$; $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t = \eta \\ 0, & t \neq \eta \end{cases}$

$\mathbb{P}(\xi(t) \neq \eta(t)) = \mathbb{P}(\eta(t) \neq 0) = \mathbb{P}(\eta = t) = 0.$

Они эквивалентны, но $\xi(t)$ имеет непрерывные траектории, а у другого - ~~различны~~ разрывные.

Опр. Конкретный выбор с.ф. из набора эквив. наз-ся его реализацией

Теперь ставится вопрос так: а есть ли реализация, обладающая заданными свойствами?

п.3 Теорема Колмогорова.

Пусть $\xi(t)$ - с.ф. с набором КМ распределений $\{F_{t_1 \dots t_n}, n \geq 1, t_1 \dots t_n \in T\}$ (мы знаем, что они есть)

Свойства КМР.

1) Пусть $(i_1, \dots, i_n)$ - перестановка чисел $(1, \dots, n)$

Тогда $F_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n)$

2) $F_{t_1 \dots t_{n-1}, t_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, +\infty) = F_{t_1 \dots t_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1})$

Условие согласованности: выполнение 1) и 2)

Теорема (Колмогорова) о системе согласованных КМР. Пусть задан набор $\{F_{t_1 \dots t_n}, n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n\}$ функций распределения. Если T - локально-компактное топологическое пр-во и выполнено условие согласованности, то существует некоторое вер. пр-во $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и сл. ф-я $(\xi(t), t \in T)$ заданная на нём, т.ч. представленный набор - КМР $(\xi(t), t \in T)$

170210

ЛЕКЦИЯ #02

ГЛАВА 2. Классификация случайных функций.

Итак, с. ф.: $\xi: \Omega \times T \to X$; при $\forall t \in T$ $\xi(\cdot, t)$ – с. в.

§1 Классификация по пр-ву параметров T.

Пусть $\xi = (\xi(t), t \in T)$ – некая с. ф. Если $T \subseteq \mathbb{R}^1$, то ξ – случайный процесс, t – время. Если $T = [a, b], [0, +\infty), \mathbb{R}^1$, то говорят о ξ – случайный процесс с непрерывным временем; если T конечно или счетно, то ξ – сл. пр. с дискретным временем. (Н/Р, $T = \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$)

Если $T \subset \mathbb{R}^n$, то ξ – случайное поле.

<u>Замечание</u> Всюду далее в нашем курсе будут изучаться только случайные процессы.

§2 Классификация по множеству значений X.

Если X конечно или счетно, то ξ – дискретный сл. процесс. Если $X = \mathbb{R}$, то ξ – вещественный сл. пр.; если $X = \mathbb{C}^1$, то ξ – комплексный случ. процесс. Если $X = \mathbb{R}^m$ (или $X \subseteq \mathbb{R}^m$), то ξ – векторный или многомерный сл. пр.

§3 Классификация по типу зависимости.

п. 1 Квазидетерминированные процессы

<u>Опр.</u> Сл. пр. $(\xi(t), t \in T)$ наз-ся квазидетерминированным, если сущ-т ф-я $f(t; x_1, \ldots, x_n)$ и случайный вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$, т.ч. $\xi(t) = f(t, a)$ (конструктивное задание с.п.)

<u>Пример.</u> $\xi(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n \cdot t^n$, где $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ – случ. вектор. Это – полином со случайными коэффициентами. (Так-то!)

п. 2 Процессы с независимыми значениями.

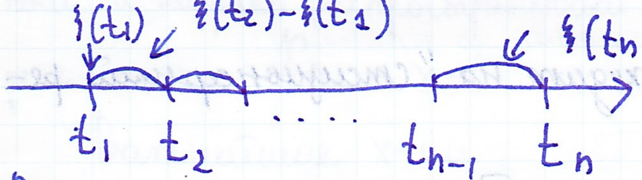
Опр. Сл. пр. $(\xi(t), t \in T)$ наз-ся процессом с независимыми значениями, если $\forall n \geq 2$, $\forall t_1, \dots, t_n \in T$, с.в. $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ — независимы.

Сами по себе они малоинтересны, но они часто используются для построения прочих процессов.

Пример. Последовательность независимых и одинаково распределенных с.в. $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ — наз-ся дискретным белым шумом. Часто предполагается наличие конечных $\mathbb{E}\varepsilon_n$ и $\mathbb{D}\varepsilon_n = \sigma^2$. Частенько $\mathbb{E}\varepsilon_n = 0$.

П.3 Процессы с независимыми приращениями.

Опр. $(\xi(t), t \in T)$ есть процесс с независимыми приращениями, если $\forall n \geq 2$, $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ сл. величины $\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ независимы.



Накопление акций, работа, пришедшая на узел...

Пример. Пусть $\{\varepsilon_n, n \geq 0\}$ — дискретный белый шум. Положим $S_0 = 0$, $S_1 = \varepsilon_1, \dots, S_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$. Легко проверить, что это — процесс с незав. приращениями. $\{S_n, n \geq 0\}$ — однородное случайное блуждание. Если $\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & \text{с вер. } p \\ 0, & \text{с вер. } 1-p \end{cases}$, то $\{\varepsilon_k\}$ — схема Бернулли; S_n — число успехов в n испытаниях, $S_n \sim Bi(n, p)$

Опр. Сл. пр. $(\xi(t), t \geq 0)$ наз-ся процессом Леви, если:

1) $\xi(0) = 0$ почти по-любому;
2) $\xi(t)$ — пр. с нез. приращ.
3) $\forall t \geq 0, \forall h > 0$ распределение с.в. $\xi(t+h) - \xi(t)$ зависит только от h (но не от t)

Вообще говоря, к этому условию д-т условие регулярности: сущ. реализация с какими-то ограничениями на непрерыв-ть.

П.4 Мартингалы с дискр. временем.

Пусть $(\varepsilon_n, n \geq 0)$ - одн. случ. блужд, причем $\mathbb{E}\varepsilon_n = 0$, $\mathbb{D}\varepsilon_n = \sigma^2$.

~~Введем~~ Вычислим $\underline{\mathbb{E}(S_n | S_1, \dots, S_{n-1})} = \mathbb{E}(S_{n-1} + \varepsilon_n | S_1, \dots, S_{n-1})$ $= \mathbb{E}(S_{n-1} | S_1, \dots, S_{n-1}) + 0 = \underline{S_{n-1}}$ - это и есть определения мартингала,

<u>Опр.</u> Послед-ть $(\xi_n, n \geq 0)$ называется мартингалом, если:

1) $\forall n$ сущ-т $\mathbb{E}\xi_n < +\infty$.

2) $\forall n \geq 1$ $\mathbb{E}(\xi_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \xi_{n-1}$

П.5 Стационарные процессы.

<u>Опр.</u> Случ. пр-с $(\xi(t), t \in T)$, где $T = \mathbb{R}^1$ или $\mathbb{Z}^1$ наз-ся стационарным, если $\forall n \geq 1$, $\forall t_1, \dots, t_n \in T$, $\forall h \in T$ случ. вектора $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ и $(\xi(t_1 + h), \dots, \xi(t_n + h))$ одинаково распределены.

Встречаются, когда система выходит на "стационарный режим" (уже

<u>Следствие.</u> Пусть $\forall t$ $\mathbb{E}(|\xi(t)|^2) < \infty$. Тогда:

1) $\forall t \in T$, $\forall h \in T$, с.в. $\xi(t)$, $\xi(t+h)$ одинаково распределены. $\Rightarrow \mathbb{E}\xi(t) = \mathbb{E}\xi(t+h) = a$. $\Rightarrow \mathbb{E}\xi(t) = a = const$

2) $\forall s, t \in T$, $\forall h \in T$ сл. векторы $(\xi(s), \xi(t))$, $(\xi(s+h), \xi(t+h))$ одинаково распределены.

$cov(\xi(s), \xi(t)) = cov(\xi(s+h), \xi(t+h)) = cov(\xi(0), \xi(t-s))$ $= f(t-s)$

П.6 Гауссовские процессы.

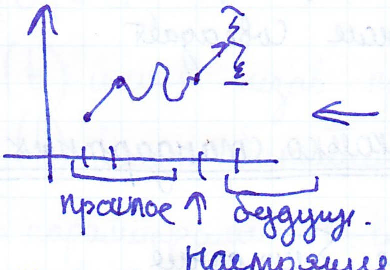
<u>Опр.</u> Сл. процесс $(\xi(t), t \in T)$ наз-ся нормальным (гауссовским), если все его конечномерные распределения явл-ся многомерными гауссовскими (нормальными) р-ми.

П.7 Марковский случ. процесс.

<u>Опр.</u> Сл. пр. $(\xi(t), t \in T \subset \mathbb{R}^1)$ наз-ся марковским, если $\forall n \geq 2$

$\forall\, t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n \in T$, $\forall\, E \subset \mathbb{R}^1$, B-борелевское, $\forall\, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^1$ выполняется свойство: $\mathbb{P}(\xi(t_n) \in B \mid \xi(t_1) = x_1, \ldots, \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}) = \mathbb{P}(\xi(t_n) \in B \mid \xi(t_{n-1}) = x_{n-1})$.

(марковское свойство)



← При фиксированном настоящем прошлое и будущее независимы.

С точки зрения механики, "нет инерции". Важно, куда я пошёл, а не как и откуда.

240210

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#03}}$

Если для описания сл. пр. используются моменты порядка не более n, то соотв. теория наз-ся теорией порядка. Наиболее важный и широко распространённый случай $n=2$: т.н. корреляционная теория сл. пр. Какие х-ки используются в рамках теории?

Важнейшие х-ки:

1) $\mathbb{E}\xi(t) =: a(t)$ — вещественная ф-я. (Мат. ожидание)
2) $\mathbb{D}(t) := \mathbb{D}\xi(t)$ — дисперсия сл. пр. $\xi(t)$
3) $K(t,s) := \operatorname{cov}(\xi(t), \xi(s))$ — корреляционная ф-ия (а не ковар-я)

Итак, корр. теория изучает те св-ва сл. пр., которые можно описать в терминах $a(t)$, $\mathbb{D}(t)$, $K(t,s)$.

п. 8 Процессы с некоррелированными приращениями.

Опр. Сл. пр. $(\xi(t), t \in T \subset \mathbb{R}^1)$ имеет некоррелированные приращения, если $\forall\, t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ из T с.в. $\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ некоррелированы.

п. 9 Стационарные процессы в широком смысле.

Опр. Сл. пр. $(\xi(t)$, где $t \in \mathbb{R}^1$ или $t \in \mathbb{Z}^1)$ наз-ся стационарным в широком смысле, если: 1) $\forall t\ \mathbb{E}|\xi(t)|^2 < \infty$; 2) $\mathbb{E}\xi(t) = a = const$ 3) $\operatorname{cov}(\xi(t), \xi(s)) = \hat{K}(t-s)\ \forall t, s \in \mathbb{R}$.

Замечание 1. Если сущ. моменты втор. порядка, то стац. процесс в узком смысле есть стац. процесс в широком.

Замечание 2. Для гаусс. пр-ов стационарность в узком и широком смысле совпадает.

ГЛАВА 3. Несколько стандартных моделей.

§1 Случайное блуждание

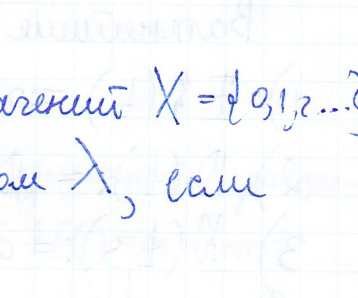
Пусть $\{\varepsilon_n\}$ - дискретный белый шум, т.е. $\{\varepsilon_n\}$ - независ. один. распр. случайные величины. Предположим, как правило, что $\mathbb{E}\varepsilon_n = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_n^2 = \sigma^2 < \infty$. Типичный пример: $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{с вер } p \\ 0 & \text{с вер. } 1-p \end{cases}$. Рассмотрим случ. процесс с дискретным временем: $n = 0, 1, 2 \ldots$: $S_0 = 0$, $S_1 = \varepsilon_1$, $S_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, ..., $S_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$. Процесс такого типа - случайное блуждание. В случае схемы Бернулли, S_n - число успехов в n испытаниях. (Сколько заявок поступило за время n)

§2 Пуассоновский процесс.

Опр. Сл. пр. $(N(t), t \geq 0)$ с множеством значений $X = \{0, 1, 2 \ldots\}$ наз-ся процессом Пуассона с параметром λ, если выполнены три св-ва:
1) $N(0) = 0$ п.н.;
2) $N(t)$ имеет незав. приращения;
3) $\forall t \geq 0$, $\forall h \geq 0$ с.в. $N(t+h) - N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λh

(Вспомним, что $\xi \sim Pois(\lambda)$: $\mathbb{P}(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$)

Можно показать, что $\exists$ такая реализация процесса Пуассона, типичная траектория которого имеет след. вид:



Покажем, что процесс Пуассона можно получить в качестве некого ~~сл.~~ предельного случая из нек. процесса случайного блуждания. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ - дискретного белого шума, причем $\varepsilon_n = \begin{cases}1, & \text{вер } p\\ 0, & \text{вер } 1-p\end{cases}$. Разделим числовую ось на интервалы длины Δ. Предположим, что $p=\lambda\Delta$, $1-p = 1-\lambda\Delta$. Для $t = n\Delta$ положим $s(t) = \xi_n = \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n$.

Если $\Delta = \frac{1}{n}$, то: 1) $\xi_n(0)=0$;

2) $\xi_n(t)$ имеет незав. приращения;

3) $\xi_n(t)$ имеет биномиальное распределение с параметрами n и $p=\frac{\lambda}{n}$.

По т. Пуассона, распределение $\xi_n(t)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ.

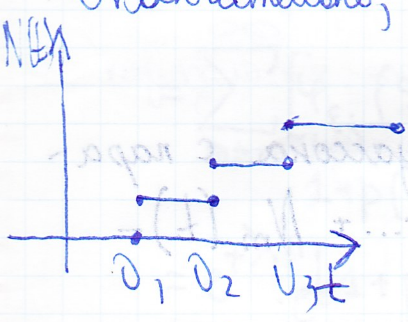
Вычислим основные характеристики ПП. В силу св-ва 3), сл. в. $\xi(t)$ имеет распределение с параметром λt. Значит,

1) $a(t) = \mathbb{E}\xi(t) = \lambda t$.

2) $D(t) = \mathbb{D}\xi(t) = \lambda t$

3) Пусть $s<t<\infty$. Случ. величины $\xi(s)$, $\xi(t)-\xi(s)$ независимы $\Rightarrow$ некоррелированы $\Rightarrow R(t,s) = cov(\xi(s),\xi(t)) =$
$= cov(\xi(s), \xi(s)+\xi(t)-\xi(s)) = cov(\xi(s),\xi(s)) + \overset{0}{cov(\xi(s),\xi(t)-\xi(s))} =$
$= D(s) = \lambda\cdot s$

Окончательно, $R(t,s)=\lambda\min(t,s)$



Итак, снова типичная траектория.

Когда ПП задается посл-ю $(\nu_1,\nu_2,\ldots)$, то говорят, что поток (событий), задающий $N(t)$. Определим $\tau_1 = \nu_1$, $\tau_2 = \nu_2-\nu_1$, ..., $\tau_n = \nu_n - \nu_{n-1}$ — время между поступлением n-й и $n-1$ заявки. Существует взаимнооднозначное соотв. между тр. процесса $N(t)$ и соотв. послед-ю $\{\tau_n\}$ (Так-то!)

А каковы св-ва τ_n?

Лемма 1. Если $\{N(t), t\geq 0\}$ есть ПП с параметром λ, то соотв. ему послед-ть τ_n есть послед-ть независимых одинаково распр. сл. в-н с ~~пар~~ показательным р-м (пар. λ

Опр. $(\tau_n, n\geq 1)$ и $(\vartheta_n, n \geq 1)$ – поток заявок. (не обяз ПП)

Опр. Поток заявок наз-ся рекуррентным, если с. в. τ_n независимы и один. распределены.

Опр. Поток заявок $(\vartheta_n, n\geq 1)$, соотв. случайному процессу $(X(t), t\geq 0)$ наз-ся стационарным, если $\forall t_0 \geq 1$, $\forall t_1, \dots, t_n$, р-е случайного вектора $X(t_1+t_0)-X(t_0), \dots, X(t_n+t_0)-X(t_0)$ не зависит от t_0.

Опр. Поток заявок ϑ_n, соотв. случ. процессу $\{X(t), t\geq 0\}$ наз-ся ординарным, если $\forall t>0$ предел $\lim\limits_{h\to 0}\left[\mathbb{P}(X(t+h)-X(t)\geq 1)\cdot\frac{1}{h}\right]=0$.

Задача. Д-ть, что ПП порождает рекуррентный стационарный ординарный поток заявок

· Оказывается, никаких других процессов с такими свойствами нет!

Теорема (А.Я. Хинчин) Если поток заявок ϑ_n, соотв. случ. пр-су $X(t)$ является рекуррентным, стационарным и ординарным, то $X(t)$ – ПП!!

0310

ЛЕКЦИЯ #04

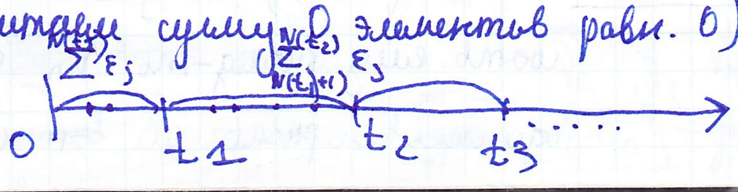
• Если $N_1(t), \dots, N_m(t)$ – незав. пр. Пуассона с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, то сл. пр. $N(t) = N_1(t)+\dots+N_m(t)$ – пр. Пуассона с $\lambda = \lambda_1+\dots+\lambda_m$.

Пусть $N(t)$ – пуас. процесс с пар. λ; $\{\xi_j\}$ – посл-ть с. в., которые независимы, а каждая из них имеет вид $\xi_j = \begin{cases} 1, & \text{с вер. } p \\ 0, & \text{с вер. } 1-p \end{cases}$

Рассмотрим $N_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{N(t)} \xi_j$ (N_1 получен из $N(t)$ просеиванием). Покажем, что $N_1(t)$ – пуассонов. процесс.

1) $N_1(0) = 0$ п. н.; (считаем сумму 0 элементов равн. 0)

2) $0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$



На первом шаге $N(t_1)$ слагаемых, на вт. $N(t_2)-N(t_1)-1$ }. Слагаемые в каждой из сумм на непересекающихся интервалах независимы. Итак, $N_1(t)$ имеет незав. приращения.

3) $N_1(t+h)-N_1(t)=\sum_{j=N(t)+1}^{N(t+h)} \varepsilon_j \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{N(h)} \varepsilon_j$ — найдём распр. этой с. в.

Вычислим производящую ф-ю моментов (из ТВ известно, что она однозначно восстанавливает р-е)

$$\varphi_{N(h)}(s)=\mathbb{E}\left[e^{sN(h)}\right]=\sum_{m=0}^{\infty} e^{sm}\,\mathbb{P}(N(h)=m)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} e^{sm}\frac{(\lambda h)^m}{m!}e^{-\lambda h}=e^{-\lambda h}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda h e^s)^m}{m!}=e^{-\lambda h}\cdot e^{\lambda h e^s}=$$

$=e^{(e^s-1)\lambda h}$ а такая пр. ф. у р-я Пуассона с пар. λh.

Для с. в. $\sum_{j=1}^{N(h)} \varepsilon_j = N_1(h)$ имеем $\varphi_{N_1(s)}(s)=\mathbb{E}\, e^{sN_1(h)}=\left\{\begin{matrix}\text{ф-ла}\\ \text{полной}\\ \text{м.о}\end{matrix}\right\}$

$$=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{sN_1(h)}\,|\,N(h)\right)\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(e^{sN_1(h)}\,|\,N(h)=m\right)\cdot$$

$$\cdot\,\mathbb{P}(N(h)=m)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(\exp\left\{s\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\right\}\right)\mathbb{P}(N(h)=m)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\Big[\underbrace{\varphi_{\varepsilon_j}(s)}_{1+p(e^s-1)}\Big]^m\,\mathbb{P}(N(h)=m)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[1+p(e^s-1)\right]^m\frac{(\lambda h)^m}{m!}e^{-\lambda h}=$$

$$=e^{+\lambda h}\cdot e^{[1+p(e^s-1)]-\lambda h}=\exp\{(e^s-1)\,h(\lambda p)\}\Rightarrow$$

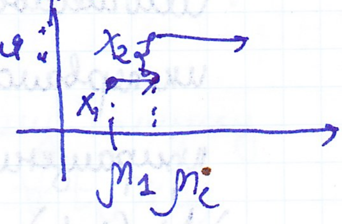
N_1 имеет р-е Пуассона с пар. $p\lambda h$. Это наз-ся свойством просеивания П.П.

§3 Сложный процесс Пуассона.

Пусть $N(t)$ — ПП с пар. λ, $\{X_j\}$ — посл-ть нез. од. распр. сл. величин с ф. р. $F(y)$, которые независимы от $N(t)$.

Определим $S(t)=\sum_{j=1}^{N(t)} X_j$, $t\geq 0$. $\{S(t), t\geq 0\}$ — сложный ПП с пар. λ и ~~с ф.р. $F(y)$~~.

ф.р. величины иска (заявки) $F(y)$. Очень часто $X_j \geq 0$; $S(t)$ – „общая работа", поступившая в систему за $[0,1]$. Типичная траектория:



§4 Винеровский процесс.

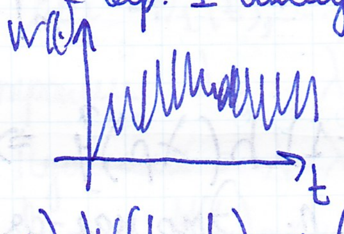
Опр. Сл. процесс $(W(t), t \geq 0)$ есть винеровский процесс с параметром $\sigma^2 > 0$, если

1) $W(0) = 0$ п.н.
2) $W(t)$ имеет нез. приращ.
3) $\forall t \geq 0$ $\forall h > 0$ с.в. $W(t+h) - W(t)$ имеет норм. распред. с $a = 0$, дисп. $\sigma^2 h$.

· $\sigma^2 = 1$ – станд. Винеровский процесс.

· Используя т. Колмогорова о согласованных конечномерных р-ях, можно д-ть, что такой пр. существует. Приведём б/д некие основные свойства.

1) Существует такая реализация Винеровского процесса, в которой с вер. 1 все траектории непрерывны.
2) Свойства типичной траектории. Любая реализация с вер. 1 обладает нигде не дифф. траекторией.



3) $W(t+h) - W(t)$ имеет распределение, зависящее только от h. (т.е. это процесс с однор. приращениями) (т.е. это процесс Леви)
4) Известна следующая характеризация Винеровского процесса, полученного Полем Леви.

Теорема. Если $\xi(t)$ имеет незав. и однор. приращения и все его траектории с вер. 1 непрерывны, то это –

Винеровский процесс.

5) Как и для ПП, можно показать, что $\mathbb{E}W(t)=0$, $\mathbb{D}W(t)=\sigma^2 t$, $cov(W(t),W(s))=\sigma^2 \min(t,s)$

6) Сл. процесс $(W_1(t)=a^{-1/2}W(at), t\geq 0)$ - Винеровский процесс. (Если это верно $\forall a>0$, то процесс наз-ся самоподобным с пар. $h=1/2$ (параметр Харста))

· Первые два св-ва очевидны.

$W_1(t+h)-W_1(t)=a^{-1/2}[W(a(t+h))-W(at)]\sim N(\ ,\ )$.

$\mathbb{E}[W_1(t+h)-W_1(t)]=0$; $\mathbb{D}[W_1(t+h)-W_1(t)]=\frac{1}{a}\sigma^2 ah=\sigma^2 h$

7) Фиксируем некоторый $t_0>0$; р-м сл. пр.

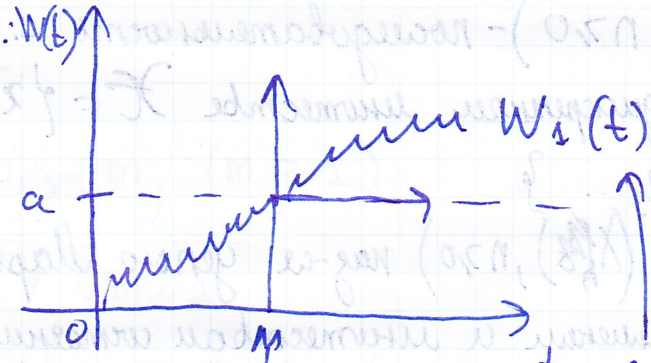
$W_1(t)=W(t+t_0)-W(t_0)$. Оказывается, $W_1(t)$ - винеровский процесс с пар. σ^2!

· Обозначим $\mathcal{F}_t=\sigma(W(s), s\leq t)$ - все события, к-е определяются поведением процесса до момента времени t.

<u>Опр</u> Неотр. сл. в. τ наз-ся марковским моментом для процесса $(W(t), t\geq 0)$, если $\forall t>0$ соб. $(\tau\leq t)\in\mathcal{F}_t$

8) Если τ - марковский момент для Винеровского процесса $(W(t), t\geq 0)$, то сл. пр. $W_1(t)=W(t+\tau)-W(\tau)$ - тоже Винеровский процесс с пар. σ^2.

Типичный пример:



τ - "останов при достижении a"

смотрим, как дальше он идет.

9) Как и в случае ПП, можно пок-ть, что Винеровский процесс после нормировки по времени и простр-ву из процесса случ. блуждание можно получить Вин. процесс (см. т. Муавра-Лапласа)

100310

ЛЕКЦИЯ #05

§5 Процесс Орнштейна-~~Ю~~Уленбека.

Опр Сл. пр. $(V(t), t \in \mathbb{R})$ наз-ся процессом Орнштейна-Уленбека, если это гауссовский стационарный сл. пр., у которого $\mathbb{E}U(t) = m$ и $Cov(V(t), V(s)) = \sigma^2 \exp\{-\beta|t-s|\}$. m, σ^2, β - параметры процесса.

Можно показать, что такой процесс можно реализовать в пр-ве непр. траекторий с вер. 1.

Пусть $m=0$, положим $\forall t \geq 0$ $\xi(t) = \int_0^t V(s)\,ds$. (таким образом, $\xi(t)$ дифф-ма)

Однако, увы, производных второго порядка нет.

ГЛАВА 4. Основы цепей Маркова.

§1 Цепи Маркова с дискретным временем.

п.1 Основные определения.

Пусть $(X_n, n \geq 0)$ - последовательность с. в., принимающих значение в дискретном множестве $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ (чаще всего, это $\{0, 1, 2, \dots\}$)

Опр. Сл. пр. $(X_n, n \geq 0)$ наз-ся цепью Маркова (ЦМ) с дискретным временем и множеством состояний $\mathcal{X}$, если $\forall n \geq 1$, $\forall i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, j \in \mathcal{X}$ $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) =$

(1) $= \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1})$

• Свойство (1) - "марковское свойство". Из опр-я видно, что важную роль играют вер-ти: $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P_{ij}^{(n)}$ - вер-ть перехода из i в j на шаге (n). Если $P_{ij}^{(n)} = P_{ij}$ (от шага ничего не зависит), то ЦМ наз-ся однородной. (2)

Замечание. Всюду далее рассматриваем только однородные Ц.М.

• $P = \{p_{ij}\}$ - матрица вер-тей перехода за один шаг.

• Обозначим $P_i^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = i)$ - начальное распределение (3)

Замечание. Нетрудно показать, что вер-ть любого события, связанного с ЦМ, однозначно определяется начальным распределением и P_{ij} в частности, $\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = P_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n}$ (4)

Задача. Д-ть соотношение (4), используя т. умножения и марковское свойство.

• Определим $p_{ij}(m) = \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$ - вероятности переходов за m шагов. Аналогично, $p_j^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j)$ - распределение ЦМ на n-ом шаге. (5) (6)

• Заинтересуемся свойствами всего вышеопределённого.

Непосредственно из опр., (1) и ф-лы полной вер-ти можно доказать следующие свойства.

1) $p_j^{(n)} \geq 0 \;\; \forall j, \forall n$

2) $\sum\limits_j p_j^{(n)} = 1.$

3) $p_{ij}(m) \geq 0 \;\; \forall i, j, m;\; (m \geq 1)$

4) $\sum\limits_j p_{ij}^{(n)} = 1 \;\; \forall\, i, m \geq 1.$

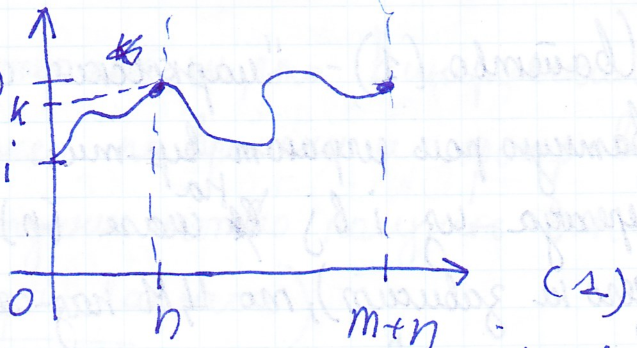
5) $p_{ij}(n+m) = \sum\limits_k p_{ik}(n) p_{kj}(m)$ (урав. Колмогорова-Чепмена)

$\Rightarrow P(n+m) = P(n) P(m); \;\; P(n) = P^n$ (7) (8)

Задача. Д-ть св-ва 1) - 6)

6) $p_j^{(n)} = \sum_i p_0^{(i)} p_{ij}(n)$

Поясним свойство 5):



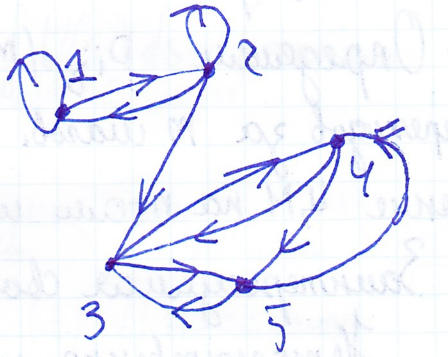
$$p_{ij}(m+n) = \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) \overset{\text{ФПВ}}{=} \sum_k \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_0 = i, X_n = k)\, \mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i) = \sum_k p_{kj}(m)\, p_{ik}(n)$$

Важная задача - как ассимптотически ведет себя цепь Маркова?

п.2 Классификация состояний.

Пусть X_n - однор. ЦМ с матр. перехода $P = (p_{ij})$. Для наглядного представления введём граф ЦМ. Вершины графа - состояния цепи. Из i проводим ориентированное ребро j, если $p_{ij} > 0$.

Пример.
$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$



Опр. Состояние j достижимо из состояния i, если $\exists n \geq 1$: $p_{ij}(n) > 0$.

Опр. Состояния i и j сообщаются, если они достижимы друг из друга.

Лемма. Сообщающиеся состояния разбивают $\mathfrak{X}$ на непересекающиеся классы. Внутри каждого класса состояния сообщаются, состояния из разных классов не сообщаются.

Опр. Состояние i наз-ся поглощающим, если $p_{ij}(n) = 0$ $\forall j \neq i, \forall n \geq 1$.

Опр. Состояние i наз-ся несущественным, если сущ. $j \in \mathfrak{X}$, $m \geq 1$, т.ч. из i в j перейти можно, но $\forall n \geq 1$ из j в i

перейти нельзя.

<u>Задача.</u> Д-ть, что для несущественного состояния с вер-ю 1 мы когда-нибудь из него выйдем, и больше никогда не вернемся назад

<u>Опр.</u> Все остальные состояния – существенны.

<u>Замечание 1</u> Если мы находимся в замкнутом классе существенных состояний, то мы никогда из него не выходим.

<u>Замечание 2</u> Если в цепи Маркова есть несколько классов существенных состояний, она как бы разлагается на несколько независимых цепей.

<u>Опр.</u> Если в ЦМ есть только один класс существенных состояний, то она наз-ся неразложимой. Иначе она наз-ся разложимой.

· Для состояния i определим мн-во $N(i) = \{n \geq 1 : P_{ii}(n) > 0\}$

<u>Опр.</u> Периодом состояния i наз-ся число $d(i) = \text{НОД}(N(i))$. Состояние i а-периодическое, если $d(i) = 1$.

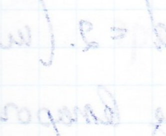
17.03.10

ЛЕКЦИЯ #06

<u>Теорема</u> (Солидарность) Внутри одного замкнутого класса:

1) Все состояния существенные, или не существенные.
2) Внутри состояния все состояния имеют одинаковый период

<u>Замечание.</u> Если период нек. класса $d \geq 2$, то его можно разбить на d непересекающихся классов подклассов и упорядочить их таким образом, что возможны переходы <u>только</u> из предыдущего подкласса в последующий.



п.3 Эргодическая теорема для дискретных цепей Маркова.

1. Что такое стационарный режим?

2. Что значит, что система выходит на стац-режим?

3. При каких условиях это происходит?

Опр. Распределение вероятностей $Q=\{q_1, q_2, \dots\}$ называется стационарным для однородной ЦМ с матрицей вероятностей перехода $P=(p_{ij})$, если $\forall j \;\; q_j = \sum_i q_i p_{ij}$ (9)

Замечание. Если начальное распределение $P^{(0)}$ совпадает с Q, где Q-стац., то $\forall n \geq 1$ легко показать, что $P^{(n)}=Q$.

(10) Предположим, что существует предел $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ – финальные вероятности.

Опр. ЦМ называется эргодической, если финальные вероятности (10) существуют, не зависят от начального состояния i и $\sum\limits_j \pi_j = 1$.

Задача. Если ЦМ – эргодическая, то финальное распределение π есть стационарное распределение (причём, единственное)

Выясним, при каких условиях эргодичности не будет.

1) Пусть ЦМ разложима, т.е. $\exists$ не менее двух существенных классов. Если начальное состояние i принадлежит одному из классов, то финальные вероятности могут быть положительными только для j из этого же класса; аналогично для второго класса. Следовательно, если финальные вер-ти и существуют, то они зависят от начального состояния.

2) Пусть существенный класс один, но его период $d=2$. (или (не важно) 3, 4 ...) Тогда, если i-из первого подкласса, j-из второго подкласса то $p_{ij}(n)>0$ для $n=2k+1$, $p_{ij}(n)=0$, $n=2k$.
Как правило, финальной вер-ти нет (0 – 0)

Теорема. Конечная ЦМ является эргодической тогда и только тогда, когда она неразложима и а-периодична.

Замечание. 1) Рассмотрим следующую ЦМ: $\underset{i-1}{|}\xrightarrow{1-p}\underset{i}{|}\xrightarrow{p}\underset{i+1}{|}$

$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^1$

(Случайное блуждание)

Если $p > 1/2$, то, используя усиленный ЗБЧ, можно показать, что данная ЦМ п.н. уходит в $+\infty$.

Эффект "невозвратности".

2) Если в пред. примере $p = q = 1/2$, то пределы (10) существуют, но $\pi_j = 0$ $\forall j$ (эффект "возвратных, но нулевых" состояний)

Обозначим через $f_i(n) = \mathbb{P}(X(0)=i, X(1) \neq i, \dots, X(n-1) \neq i, \dots, X(n)=i)$ – – вер-ть того, что, выйдя из i, мы впервые вернемся в него на шаге n.

$F_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_i(n)$ – вер-ть выйдя из i, мы туда вернемся (когда-то)

Обозначим $\tau_i = \min\limits_{m \geq 1}(X_m = i$, если $X_0 = i)$ – момент первого возврата в состояние i.

Опр. Состояние i наз-ся возвратным, если $F_i = 1$. (Иначе, не возвратное.)

Теорема (Критерий) Состояние i возвратно $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$

Опр. Состояние i наз-ся положительным, если τ_i конечно с вероятностью 1. Иначе, оно нулевое.

Задача. Если в случ. блуждании, рассмотреном выше, $p \neq q$, то ЦМ невозвратна. Иначе, ЦМ возвратна.

Теорема. Цепь Маркова со счетным числом состояний будет эргодической $\Leftrightarrow$ 1. ЦМ неразложима.

2. ЦМ непериодична.

3. Существует состояние i_0, т.ч. $\mathbb{E}\tau_{i_0} < \infty$ (тогда это выполнено и для всех состояний)

В случае эргодичности финальные вер-ти имеют вид: $\pi_j = \dfrac{1}{\mathbb{E}\tau_j}$

(11) **Теорема** (Бернштейна) Пусть мы имеем некую однородную ЦМ, для которой существует состояние j_0, $0<\lambda<1$, т.ч. $\forall i\ p_{ij_0}\geq\lambda$

Тогда для любых двух начальных состояний $p^{(0)}$, $q^{(0)}$ соответствующие распределения на n-м шаге удовлетворяют

(12) соотношениям $\sum_{j} |p_j^{(n)} - q_j^{(n)}| \leq 2(1-\lambda)^n$, причем

фин. вер-ти сущ-т и явл. единств. решением системы $\pi_j = \sum \pi_i p_{ij}$, $\sum \pi_j = 1$.

Д-во. Очевидно, что $\sum_j (p_j^{(n)} - q_j^{(n)}) = 0$. Далее, $\sum_j^+$ и $\sum_j^-$ означают, что мы суммируем там j, где соотв. разность >0 (или <0). Пусть j_0 соотв. $\sum^-$.

(13) Далее, сумма по j $\sum_j |p_j^{(n)} - q_j^{(n)}| = \sum^+(\ldots) - \sum^-(\ldots) =$

$$= 2\sum_j^+(\ldots) = 2\sum_j^+ \sum_i (p_i^{(n-1)} - q_i^{(n-1)}) p_{ij} =$$

$$= 2\sum_i \sum_j^+ (p_i^{(n-1)} - q_i^{(n-1)}) p_{ij} \leq 2\sum_i^+ (p_i^{(n-1)} - q_i^{(n-1)}) \underbrace{\sum_j^+ p_{ij}}_{\leq(1-\lambda)}$$

$$\leq 2(1-\lambda)\sum_i^+ (p_i^{(n-1)} - q_i^{(n-1)}) = (1-\lambda)\sum_i |p_i^{(n-1)} - q_i^{(n-1)}| \leq$$

$$\leq (1-\lambda)^n \sum |p_i^{(0)} - q_i^{(0)}| \leq 2(1-\lambda)^n.$$ Дальше д-ть самим.

Ч.Т.Д.

(Эргодическая теорема для ЦМ) **Теорема.** Если $(X_n, n\geq 0)$ — эргодическая цепь маркова с фин. вероятностями π_j, $j\geq 1$, f — некоторая вещественная ф-я на пространстве состояний, т.ч. $\sum_j |f(j)|\pi_j < \infty$. Тогда

$$\frac{f(X_0)+\ldots+f(X_{n-1})}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \sum_j f(j)\pi_j$$

ЛЕКЦИЯ #07

Задача. Производится закупка сырья 2х типов: "хорошее" (1) и "неуд." (2).

При первоначальной закупке сырье будет хорошего качества с вер. $\frac{1}{2}$ и неуд. с вер. $1/2$. Если в пред. покупке сырье было хор. качества, то при след. закупке оно будет таким же с вер. 0.7, с вер 0.3 - неуд. Если в пред. закупке - неуд., то в след. такое же с вер. 0.6. Найти вер-ть того, что сырье будет хорошее, 1) в третьей покупке

2) после дост. большого числа покупок.

Решение. Описываем динамику с помощью Ц.М.

$\mathcal{X} = \{1, 2\}$, начальное распределение $p_j^{(0)} = \frac{1}{2}$, $j = 1, 2$.

Матрица вероятностей перехода за один шаг имеет вид $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ 1) Надо найти $p_j^{(2)} = \sum_i p_i^0 P_{ij}(2)$

$$P(2) = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

$$p(2) = [0.5 \quad 0.5] \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.565 \\ 0.435 \end{bmatrix}$$

2) Надо найти финальные вер-ти $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2)$

Стационарное распределение: $\begin{cases} \Pi_j = \sum_i \Pi_i P_{ij} \\ \Pi_1 + \Pi_2 = 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} \Pi_1 = 0.7\Pi_1 + 0.4\Pi_2 \\ \Pi_2 = 0.3\Pi_1 + 0.6\Pi_2 \\ \Pi_1 + \Pi_2 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} -0.3\Pi_1 + 0.4\Pi_2 = 0 \\ 0.3\Pi_1 - 0.4\Pi_2 = 0 \\ \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \Pi_2 = \frac{3}{4}\Pi_1, \quad \Pi_1 = 4/7, \quad \Pi_2 = 3/7$$

Это все должны уметь решать!

§2 Цепи Маркова с непрерывным временем.

п.1 Основные понятия

Пусть мы имеем с.п. $(X(t), t \geq 0)$ с непр. временем и дискретным пр-вом состояний $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots\}$

Опр. СлПр $(X(t), t \geq 0)$ наз-ся Ц.М. с непр. временем, если $\forall\, t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$, $\forall\, i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathcal{X}$

(1) $\mathbb{P}(X(t_n)=i_n \mid X(t_0)=i_0, \dots, X(t_{n-1})=i_{n-1}) = \mathbb{P}(X(t_n)=i_n \mid$
$X(t_{n-1})=i_{n-1})$.

(2) Важную роль играют $\mathbb{P}(X(t+s)=j \mid X(s)=i)$ – вероятность перехода из i в j за время t. Если $\mathbb{P}$ не зависит от s, то ЦМ наз-ся однородной. Их тогда обозначают $p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t+s)=j \mid X(s)=i)$. Р-м только такие.

(4) Рассмотрим также $p_i(0)$ – вероятность того, что
в начальный момент времени мы в состоянии i (началь-
(5) ное распределение); $p_j(t) = \mathbb{P}(X(t)=j)$ – распределение
ЦМ в момент времени t.

Аналогично дискретному случаю д-ся следующие свойства:

1) $p_j(t) \geq 0 \quad \forall j, \forall t \geq 0$

2) $\sum\limits_j p_j(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$

3) $p_{ij}(t) \geq 0 \quad \forall i,j \in \mathcal{X}, t > 0.$

4) $\sum\limits_j p_{ij}(t) = 1 \; \forall i \in \mathcal{X}, \forall t > 0.$

5) $p_j(t) = \sum\limits_i p_i(0)\, p_{ij}(t) \quad \forall j \in \mathcal{X}, \forall t > 0.$

6) $p_{ij}(t+s) = \sum\limits_k p_{ik}(t)\, p_{kj}(s) \quad \forall i,j \in \mathcal{X} \; \forall t,s > 0$

Если $P(t) = (p_{ij}(t))$, то 6) имеет вид: $P(t+s) = P(t)P(s)$. Уравнение Колмогорова-Чэпмена.

<u>Опр.</u> Говорят, что ЦМ $(X(t), t \geq 0)$ с непр. временем непрерывна справа, если $\forall t \geq 0$ $\forall$ траектории ($\omega \in \Omega$) $\exists \delta > 0$, т.ч.
(7) $\forall 0 \leq s < \delta \quad X(t+s) = X(t)$

<u>Замечание.</u> Всюду далее р-м только такие Ц.М.

(8) Тогда $\exists \lim\limits_{t \to 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$. Положим $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$

(по определению). Тогда св-ва 3)–6) остаются справедливыми и при $t, s = 0$.

(п. 2) Вложенная цепь Маркова.

Пусть $X(0) = i$. Определим $\tau_i = \inf\limits_{t>0}\{X(t) \neq i, \mid X(0) = i\}$ – момент первого выхода из i. (9)

Опр. Состояние i наз-ся поглощающим, если $\forall t > 0 \quad P_{ii}(t) = 1$.

Лемма 1. Если i – не поглощающее состояние, то сущ. конечная $\lambda_i > 0$, т.ч. $\mathbb{P}(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}$, т.е. τ_i имеет показательное распределение.

Лемма 2. Если i – не поглощающее состояние, то с. в. τ_i, $X(\tau_i)$ независимы.

Теорема будет ниже. Положим $\Pi_{ij} = \mathbb{P}(X(\tau_i) = j \mid X(0) = i)$.

Пусть $X(0) = i$ п.н.; τ_1 – момент первого выхода из состояния i. Договоримся $\hat{X}_0 = i$; $\hat{X}_1 = X(\tau_1)$; τ_2 – момент первого выхода из состояния $X(\tau_1)$; $\hat{X}_2 = X(\tau_1 + \tau_2)$ и т.д.

Теорема. Сл пр $\hat{X}_n$ является однородной ЦМ с дискретным временем и матрицей переходов за один шаг (Π_{ij}).

Если мы имеем ЦМ с непр. временем, то по ней получаем: $(\hat{X}_n, n \geq 0)$ и $(\tau_i, i \in \mathcal{X})$; $(\hat{X}_n, n \geq 0)$ – вложенная Ц.М. А можно ли по этой паре восстановить исходную цепь? Легко видеть, что можно восстановить исходную ЦМ $(X(t), t \geq 0)$:

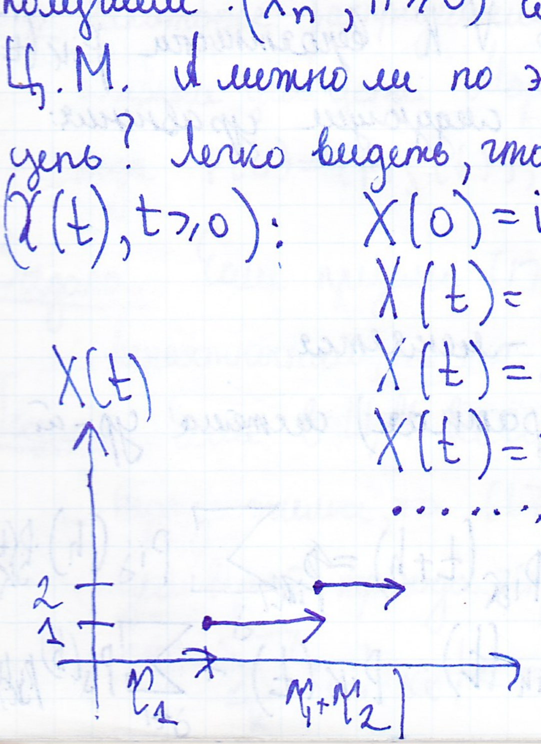
$X(0) = i$ п.н.,

$X(t) = i, \quad 0 \leq t \leq \tau_1;$

$X(t) = \hat{X}_1, \quad \tau_1 \leq t \leq \tau_2 + \tau_1$

$X(t) = \hat{X}_2, \quad \tau_1 + \tau_2 \leq t \leq \tau_2 + \tau_3 + \tau_1$

$\ldots\ldots,$



– а вложенная считает τ_i единичками.

Скороход. Введение в ТВ и СП.

31.03.10

ЛЕКЦИЯ #08

п.3 Уравнение Колмогорова

Лемма 3. 1) При $i \neq j$ существует конечный предел при $t \to 0$

(12) $$\lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = a_{ij} \geq 0.$$

(13) 2) $\forall k$ сущ кон. или беск. предел $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-p_{kk}(t)}{t} = -a_{kk} \geq 0$

Соберём числа из леммы в матрицу: $A = (a_{ij})$ – матрица интенсивностей вероятностей перехода.

Опр. Состояние k наз-ся мгновенным, если $a_{kk} = -\infty$. Иначе – немгновенное.

(14) Опр. Состояние k наз-ся регулярным, если $-a_{kk} = \sum\limits_{j\neq k} a_{kj}$.

Замечание. Ранее было показано (или просто очевидно), что $\sum\limits_{j} p_{kj}(t) = 1$; $\sum\limits_{j\neq k} p_{kj}(t) = 1 - p_{kk}(t)$. Деля на t и переходя к пределу, если это возможно, получаем (14). Состояние регулярно, если предельный переход можно осуществлять почленно.

Фундаментальный результат:

Теорема. Если состояние i регулярно, то $\forall k$ вероятности $p_{ik}(t)$ дифференцируема и справедливы следующие уравнения:

(15) $$\frac{d}{dt} p_{ik}(t) = \sum_j a_{ij}\, p_{jk}(t)$$

Замечание. 1) В (15) k – фиксир., i – меняется.

2) (15) наз-ся "первая (обратная) система ур-ий Колмогорова"

Схема д-ва. Пусть $t \geq 0$, $h > 0$. Тогда $p_{ik}(t+h) = \sum\limits_j p_{ij}(h)\, p_{jk}(t)$

$$p_{ik}(t+h) - p_{ik}(t) = p_{ii}(h)\, p_{ik}(t) - p_{ik}(t) + \sum_{j\neq i} p_{ij}(h)\, p_{jk}(t)$$

В силу сфор. выше леммы и опр-я регулярности получаем:

$$\exists \frac{d}{dt} p_{ik}(t) = a_{ii} p_{ik}(t) + \sum_{j \neq i} a_{ij} p_{jk}(t) = \sum_j a_{ij} p_{jk}(t)$$

Ч.Т.П.

Теорема. Если все состояния ЦМ регулярны, то (15) имеет решение, которое является единственным неотрицательным решением, удв. начальному условию: $p_{ik}(0) = \delta_{ik}$

Замечание. 1) Можно показать, что интенсивности вероятностей перехода тесно связаны с вложенной ЦМ: $P(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t} = e^{a_{ii} t}$. $a_{ii} = -\infty$: мгновенные состояния.

2) $P(X(\tau_i) = j / X(0) = i) = \pi_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$

Теорема. Пусть все состояния ЦМ регулярны; выполнено следующее условие: $\sum_k p_{ik}(t) |a_{kk}|$ сход-ся. Тогда справедлива вторая (прямая) система ур-й Колмогорова:

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \sum_{k=} p_{ik}(t) a_{kj} \quad (i \text{ - фиксировано, } j \text{ - меняется}) \qquad (16)$$

п. 4 Предельные теоремы.

1. Когда существует предел $t \to \infty$ $p_{ij}(t) \to q_j$, и он не зависит от i? (17)

финальные вероятности.

Опр. Некоторое распределение вероятностей $Q = \{q_j\}$ наз-ся стационарным для цепи Маркова с непр. временем и вер-ми перехода $P(t) = (p_{ij}(t))$, если $\forall i, \forall t \geq 0$: $q_j = \sum_i q_i p_{ij}(t)$ (18)

Задача. Если пределы (17) сущ-т и являются распределением вероятностей, то это - стационарное распределение.

Теорема. Если в ЦМ все состояния регулярны, вложенная ЦМ неразложимая, то (17) всегда существуют. Если, кроме того, для вер-й перехода справедлива 2ая С.У.К., и (17) таковы, что $\sum_k q_k |a_{kk}| < \infty$, то $\forall j \sum_k q_k a_{kj} = 0$. (19)

П.5 Процессы рождения и гибели.

Пусть $(X(t), t\geq 0)$ — однородная ЦМС перех. вер-тей $P(t)=P_{ij}(t)$ с пр-вом состояний $\mathcal{X}=\{0,1,2,\dots\}$

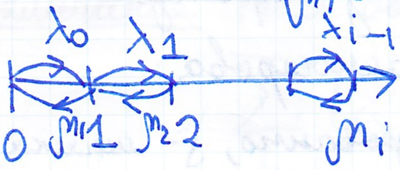
Опр. Вот такая ЦМ $(X(t), t\geq 0)$ наз-ся процессом рождения и гибели, если

$$P_{ij}(t)=\begin{cases}\lambda_i t+\bar{\bar{o}}(t), & j=i+1\\ \mu_i t+\bar{\bar{o}}(t), & j=i-1\geq 0\\ 1-(\lambda_i+\mu_i)t+\bar{\bar{o}}(t), & j=i\\ \bar{\bar{o}}(t), & |j-i|\geq 2\end{cases}$$

Замечания. 1) λ_i, μ_i — интенсивности рождения и гибели.

2) Пусть мы имеем некую биологическую систему, i — число частиц системы.

- $\lambda_i t$ — вер-ть рождения одной частицы, если их сейчас i
- $\mu_i t$ — вер-ть гибели —"—



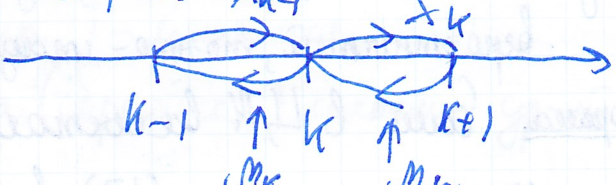
Обозначим $p_k(t)=\mathbb{P}(X(t)=k)$.

Легко показать, что справедливы УК:

$$(20)\quad\begin{cases}\dfrac{d\,p_k(t)}{dt}=\lambda_{k-1}p_{k-1}(t)-(\lambda_k+\mu_k)p_k(t)+\mu_k p_{k+1}(t), & k\geq 1\\[2mm] \dfrac{d\,p_k(t)}{dt}=\mu_1 p_1(t)-\lambda_0 p_0(t)\end{cases}$$

Исследуем вопрос о существовании стационарного режима. При $t\to\infty$ из (20) получаем, что для $p_k=\lim\limits_{t\to\infty}p_k(t)$ имеем систему уравнений:

$$(21)\quad\begin{cases}\lambda_{k-1}p_{k-1}+\mu_{k+1}p_{k+1}=(\lambda_k+\mu_k)p_k,\\ \lambda_0 p_0=\mu_1 p_1.\end{cases}$$



"сколько в среднем втекает в состояние k, столько в среднем и вытекает". Так сказать, уравнения баланса. Вообще, (21) можно явно решить :)

$p_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} p_0$; $p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0$; $p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0$; ....; $p_k = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdots \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} p_0 \quad \forall k \geqslant 1$

p_0 находим из соотношения: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \prod\limits_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)}$

Стационарное распределение существует $\Leftrightarrow p_0 \neq 0$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \prod\limits_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right) < \infty$.

А это имеет место $\Leftrightarrow \exists k_0 \geqslant 1$ и c: $\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \leqslant c < 1 \quad \forall i \geqslant k_0$.

08.04.10

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ № 09}}$

ГЛАВА 5. Элементы случайного анализа.

Пусть мы имеем СП $\xi(\xi(t); t \in [a, b])$. $\xi(t, \omega)$ - с. в.

§1 Сходимость с. в.

Опр. • П-ть с. в. ξ_n сх-ся п.н. к с. в. ξ_0, если $\mathbb{P}(\omega: \xi_n(\omega) \to \xi_0(\omega)) = 1$.

• П-ть с. в. ξ_n сх-ся по вер-ти к с. в. ξ_0, если $\forall \varepsilon > 0 \; \mathbb{P}(\omega: |\xi_n - \xi_0| \leqslant \varepsilon) \to 1$

• П-ть с. в. ξ_n сх-ся в ср. кв. к ξ_0, если $\mathbb{E}|\xi_n - \xi_0|^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\left(\underset{n \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \xi_n = \xi_0\right)$

Замечание. Сх-ть в с.к. $\Rightarrow$ сх. по вер-ти. (нер-во Чебышева)

Рассмотрим пр-во H_2 с. в. ξ, т.ч. $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$.

Задача. H_2 - линейное пр-во.

Определим для $\xi_1, \xi_2 \in H_2$ число $(\xi_1, \xi_2) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\xi_1 \cdot \xi_2$.

Задача. (ξ_1, ξ_2) обладает свойствами:

1) $(\xi, \xi) \geqslant 0 \quad \forall \xi \in H_2$; $(\xi, \xi) = 0 \Leftrightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} 0$

2) $(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1)$

3) $(c_1\xi_1 + c_2\xi_2, \xi_3) = c_1(\xi_1, \xi_3) + c_2(\xi_2, \xi_3)$

Это ж скалярное произведение! (Так-то!) Определяем длину $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)^2}$; $\rho(\xi_1, \xi_2) = \|\xi_1 - \xi_2\|$. Итак, сх. в ср.кв. $\Leftrightarrow$ сх. в H_2 относительно введённой метрики.

Можно показать, что H_2 полно относительно введ. метрики.

Критерий Коши. H_2 полно относительно введённой метрики: $\Longleftrightarrow$
$\xi_n \xrightarrow{с.к.} \xi_0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\xi_n - \xi_m)^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

Замечание. • H_2 — псевдоним L_2. $\forall$ результат из анализа ф-й на $\mathbb{R}$ переносится на H_2 (где не треб. компактности)
• Везде далее сходимость в с.к.

Лемма. Если $\xi_n \to \xi_0$, $\eta_n \to \eta_0$, то $(\xi_n, \eta_n) \to (\xi_0, \eta_0)$

Предложение. $\xi_n \in H_2$ сх. в ср.кв. $\Leftrightarrow$ сущ. конечный $\lim\limits_{n,m\to\infty} \mathbb{E}(\xi_n \xi_m) = a$

Д-во достаточности. Кр Коши: $\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \mathbb{E}(|\xi_n - \xi_m|^2) =$
$= \mathbb{E}(\xi_n, \xi_m) + \mathbb{E}(\xi_m, \xi_n) - 2\mathbb{E}(\xi_n, \xi_m) = a + a - 2a = 0$. Ч.Т.Д.

Вернёмся к СП.

Теорема. Пусть $(\xi(t), t \in [a,b])$ — СП, т.ч. $\mathbb{E}\xi^2(t) < \infty$ $\forall t$.
Тогда $\xi(t)$ имеет кон. предел в ср.кв. при $t \to t_0$
$\Leftrightarrow$ $\exists$ кон. предел $\mathbb{E}(\xi(t), \xi(s))$, $t, s \to t_0$

Замечание. Все результаты в H_2 относятся к корреляционной теории т.е. выражаются в терминах моментов не выше 2го порядка.

Следствие. В условиях теоремы $\xi(t)$ имеет предел в с.к. $\Leftrightarrow$
1) $a(t) = \mathbb{E}\xi(t)$ имеет обычный предел при $t \to t_0$
2) $K(t,s) = \mathrm{cov}(\xi(t), \xi(s))$ имеет предел при $t, s \to t_0$

§2 Непрерывность.

Пусть $\xi(t)$ — СП, т.ч. $\mathbb{E}\xi^2(t) < \infty$ $\forall t$, т.е. $\xi : [a,b] \to H_2$.

Опр. $(\xi(t), t \in [a,b])$ называется непрерывным с ср.кв. в $t_0 \in (a,b)$, если $\exists \operatorname*{l.i.m.}\limits_{t \to t_0} \xi(t) = \xi(t_0)$ п.н.;

Замечание. 1) В гр. точках — односторонняя непр-ть. (Так-то!)
2) $\xi(t)$ непр. на $[a,b]$, если непр. $\forall t \in [a,b]$.

Теорема. $(\xi(t), t \in [a,b])$ непрер. в ср.кв. на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$

1) $a(t)$ непр. на $[a,b]$

2) $K(t,s)$ непр. в т. вида (t_0,t_0).

§3 Дифференцируемость.

Пусть $\xi(t): [a,b] \longrightarrow H_2$.

Опр. С.П $\xi(t)$ является диф-м в ср.кв. в т. $t_0 \in (a,b)$, если существует при $h \to 0$ предел в ср. кв $\underset{h\to 0}{l.i.m} \frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h} = \eta \in H_2$.

Обозначение: $\xi'(t_0) := \eta$ – произв. в СК в т. t_0

Замечание. 1) В гр. точках – односторонние производные.

2) $\xi(t)$ дифф. на $[a,b]$, если $\xi'(t)$ существует во всех точках $[a,b] \Rightarrow \xi'(t)$ – новый С.П.

3) Если процесс диф. на $[a,b]$, а ξ' – непр. на $[a,b]$, то $\xi(t)$ – непр-диф. (Так-то! :))

Теорема. Если $\xi_1(t), \xi_2(t)$ – дифф на $[a,b]$ и $\forall t$ ξ_1', ξ_2' совпадают п.н., то $\exists \xi_0 \in H_2$, т.ч. $\xi_1(t) = \xi_2(t) + \xi_0$ п.н.

Теорема. Пусть $(\xi(t), t \in [a,b])$ – СП, т.ч. $\|\xi(t)\|^2 < \infty$. Этот процесс является непр. диф. в ср.кв. $\Leftrightarrow$ 1) $a(t)$ – непр. диф на $[a,b]$

2) $\exists \frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t \partial s} < \infty$ в т. (t_0,t_0) $\forall t_0 \in [a,b]$.

При этом:

А) $\mathbb{E}\xi'(t) = a(t)$ $\forall t$

Б) $\begin{bmatrix} cov(\xi(t),\xi(s)) & cov(\xi'(t),\xi(s)) \\ cov(\xi(t),\xi'(s)) & cov(\xi'(t),\xi'(s)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(t,s) & K_t'(t,s) \\ K_s'(t,s) & K_{ts}''(t,s) \end{bmatrix}$

D-во достаточности 1) и 2). Не умаляя общности, считаем, что $a(t)=0$. Из курса ВЧМ известна

Лемма. $\lim\limits_{h_1,h_2\to 0} \frac{1}{h_1 h_2}\left[K(t+h_1,s+h_2) - K(t+h_1,s) - K(t,s+h_2) + K(t,s)\right] =$

$= K_{ts}''(t,s)$

По кр. Коши, надо д-ть, что при $h_1 \to 0, h_2 \to 0$ стремится к нулю $\mathbb{E}\left(\left|\frac{\xi(t_0+h_1)-\xi(t_0)}{h_1} - \frac{\xi(t_0+h_2)-\xi(t_0)}{h_2}\right|^2\right) \xrightarrow[h_2\to 0]{h_1\to 0} 0$

Показывается всё методом пристального взгляда (раскрытием скобок)

14.03.10

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#10}}$

ГЛАВА 6. Стохастический интеграл от неслучайной функции.

(*) $\cdot \int_a^b f(t)\,d\xi(t)$, где $f(t)$ – неслучайная ф-я, а $\xi(t)$ – сл. пр.

Если $\exists\, \xi'(t)$ в ср. кв, то, по аналогии с анализом, (*) $= \int_a^b f(t)\xi'(t)\,dt$. Если все траектории (почти все) $\xi(t)$ имеют огр. вариацию, то $\forall$ траектории можно определить интеграл Стилтьеса $\int_a^b f(t)\,d\xi(t)$.

Пример типичный. Пусть $\xi(t)=W(t)$ – винеровский процесс. Можно проверить, что он не имеет произв. в ср. кв; также, с вер. 1, $W(t)$ обладает неограниченной вариацией.

§1 Стохастические ортогональные меры.

Пусть мы имеем огр. интервал вида $[a, b)$. Обозначим $\Delta = [s, t) \subset [a, b)$ Пусть каждому Δ сопоставлена с.в. $\Delta\eta$

Опр. Отображение $\Delta \to \Delta\eta$ называется стохастической ортогональной мерой, если:

1) $\mathbb{E}(|\Delta\eta|^2) < \infty$

2) Если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, то $\Delta_1\eta$ и $\Delta_2\eta$ некоррелированы, т.е. $\operatorname{cov}(\Delta_1\eta, \Delta_2\eta) = 0$.

3) Если $\Delta_1 = [s, t)$, $\Delta_2 = [t, v)$, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = [s, v)$, то $\Delta\eta = \Delta_1\eta + \Delta_2\eta$. (Конечная аддитивность)

4) $\mathbb{E}\Delta\eta = m_1(\Delta)$, $\mathbb{D}(\Delta\eta) = m_2(\Delta)$, где m_1, m_2 — две счетно-аддитивные ф-ии, заданные на сигма-алгебре подмножеств $\mathbb{R}^1$.

<u>Замечания</u> 1) 4) означает, что m_1 и m_2 опр на всех бар. мн-вах и обладают счетной адд-ю.

2) Если $m_1(\Delta) = \alpha|\Delta|$, $m_2(\Delta) = \beta^2|\Delta|$, то $\Delta\eta$ — белый шум с параметрами α, β. ($\alpha = 0, \beta = 1$: стандартный белый шум.)

Если $\Delta\eta$ — гаусс распр., то $\Delta\eta$ — гаусс. (норм. шум).

3) m_2 называют структурной мерой стохастической меры $\Delta\eta$.

<u>Пример</u> типичный. Пусть $\eta(t), t \in [a, b]$ — сл. пр., т.ч.

1) $\mathbb{E}(|\eta(t)|^2) < \infty \ \forall t$

2) $\eta(t)$ имеет некорр. приращения

3) $\mathbb{E}(\eta(t)) = a(t)$ имеет огр. вар. на $[a, b]$.

Пусть $\Delta = [s, t)$; положим $\Delta\eta = \eta(t) - \eta(s)$.

<u>Задача.</u> Д-ть, что так опр. отображение опр. стохастическую ортогональную меру.

Пусть $\Delta \to \Delta\eta$ определяет некую стохаст. ортогон. меру; для $\Delta_t = [a, t)$ положим $\eta(t) \stackrel{def}{=} \Delta_t\eta$.

<u>Задача.</u> $\eta(t)$ — сл. пр. с некорр. приращениями.

Если стох. орт. мера $\Delta\eta$ строится по процессу $\eta(t)$, то будем это обозначать $d\eta(t), t \in [a, b)$

Задача. Ст. гаусс. белый шум (СГБШ) имеет вид $dW(t)$, где $W(t)$ – стандартный Винеровский процесс.

§2 Схема построения стохаст. интеграла.

Пусть $\Delta \eta$ – ст. ор. мер с нек. m_1, m_2. Определим $\Delta\eta_0 = \Delta\eta - m_1(\Delta)$. $\Delta\eta_0$ – опять-таки СОМ, $\mathbb{E}\Delta\eta_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta\eta = \Delta\eta_0 + \underbrace{m_1(\Delta)}$, интеграл по этой мере тривиален и потому неинтересен.

Так далее рассматриваем случай $m_1(\Delta) = 0 \ \forall \Delta$.

Пусть H_2 – гильбертово пр-во сл. вл., т.е. линейное пр-во со ск.пр. $(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}\,\xi_1\xi_2$. Определим пр-во $L_2(m_2)$ неслучайных функций $f(t)$, $t \in [a,b]$, т.ч.: $\int_a^b |f(t)|^2 dm_2(t) < \infty$.

$L_2(m_2)$ – линейное пр-во. Определим $\forall f_1, f_2(t) \in L_2$

$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(t) \bar{f_2}(t)\, dm_2(t)$ – можно проверить, что это ск.пр.

$f_n \xrightarrow{L_2} f \iff \|f_n - f\|^2 = \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 d\, m_2(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

L_2 – полно относит. такой сх-ти $\Rightarrow L_2$ гильбертово. Как правило, L_2 бесконечномерно; H_2 и L_2 изоморфны ($\leftrightarrow$ + сохр. ск. пр.)

Пусть $\eta(t)$ – сл. пр. с некорр приращениями, $\mathbb{E}\,\eta(t) = 0 \ \forall t$. $d\eta(t)$ – стохастическая ОМ.

Опр. Нек. ф-я $f(t)$, $t \in [a,b)$ называется простой, если сущ. такое разбиение $a = t_0 < \ldots < t_n = b$, что $f(t) = const$ при $[t_{k-1}, t_k)$.

Пусть $\mathcal{F}$ – пр-во всех пр. ф-й.

Лемма 1. $\mathcal{F}$ – линейное пр-во.

Опр. Пусть f – простая ф-я, $d\eta(t)$ – СОМ. Положим по опр.
$$I(f) \overset{\text{опр}}{=} \int_a^b f(t)\, d\eta(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot (\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Delta_k$$

Предложение. Опр. выше СИ обладает след. св-ми:

1) $\mathbb{E}(|I(f)|^2) < \infty \ \forall f \in \mathcal{F}$

2) $\mathbb{E} I(f) = 0$

3) $I(c_1 f_1 + f_2 c_2) = c_1 I(f_1) + c_2 I(f_2)$

4) $\mathbb{E}(I(f_1) I(f_2)) = \int\limits_a^b f_1(t) f_2(t)\, d\mu_2$.

5) $\mathbb{E}(|I(f)|^2) = \int\limits_a^b |f(t)|^2\, d\mu_2(t)$

Д-во. 5) $f \in \mathcal{F}$: $\mathbb{E}(|I(f)|)^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{E}|f_k(\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k))|^2 =$

$$= \mathbb{E}\sum_{k=1}\sum_{m=1} f_k f_m (\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k))(\eta(t_{m+1}) - \eta(t_m)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (f_k^2)\, \mathbb{E}(|\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})|)^2 + \sum_{k \neq m} f_k f_m \mathbb{E}(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1}))\cdot$$

=0 в силу некорр.

$$\cdot(\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)) = \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \underbrace{D\Delta_k \eta}_{=\mu_2(\Delta_k)} =$$

$$= \int_a^b |f(t)|^2\, d\mu_2(t)$$

4) Аналогично (р-я ф-ии на одном разбиении)

Т.к. $f \in \mathcal{F}$, то $f \in L_2 \Rightarrow$ Из (5) $\Rightarrow$ 1). 2) очевидно. Аналогично 3)

Ч.Т.Д.

Лемма 2. Пр-во $\mathcal{F}$ плотно в L_2.

Пусть $f \in L_2$, f_n - простые, $f_n \to f$, f_n - фундаментальна, рассмотрим $\mathbb{E}(I(f_n) - I(f_m))^2 = \mathbb{E}(|I(f_n - f_m)|^2)$

$$= \int_a^b (f_n - f_m)^2(t)\, d\mu_2(t) = \|f_n - f_m\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \Rightarrow I(f_n) -$$

фундаментальна в H_2. В силу полноты H_2 сущ некая с. в. λ, т.ч. $I(f_n) \xrightarrow{ср.кв.} \lambda$.

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{ср.кв.} & f \in L_2 \\ \downarrow{\scriptstyle опр} & & \downarrow{\scriptstyle опр} \\ I(f_n) & \xrightarrow{в\ H_2} & \lambda \end{array}$$

Положим по определению $I(1)=\lambda$.

Замечание. Случайная вел. λ определяется с вер. 1 однозначно, не зав. от послед. 1_n

$$I(1)=\int_a^b 1(t)\,d\eta(t),$$

11.

ЛЕКЦИЯ # 11

Свойства стохастического интеграла: из опр. для произв. ф-ии и соотв. свойств предельным переходом $\forall f \in L_2$ получаем свойства 1) - 5).

Пусть $d\eta_0(t)$ — стох. орт. мера с структ. мерой μ_2, и $g \in L_2(d\mu_2)$

Рассмотрим новый с.п.: $\tilde{\eta}(t)=\int_a^t g(s)\,d\eta_0(s)$ — это стох. инт., и верно: а) $\tilde{\eta}(t)$ имеет некорр. приращения

б) $\mathbb{E}\tilde{\eta}(t)=0 \ \forall t$

в) $D(\Delta\tilde{\eta}(t))=\int_s^t |g(u)|^2\,d\mu_2(u)=\tilde{\mu}_2(\Delta)$

Итак, $d\tilde{\eta}$ — новая СОМ со стр. мерой $\tilde{\mu}_2(\Delta)$.

6) $\forall f \in L_2(d\tilde{\mu}_2)$ $\int_a^b f(t)\,d\tilde{\eta}(t)=\int_a^b f(t)g(t)\,d\eta_0(t)$

7) Пусть $d\eta_0(t)$ — СОМ, и $g(t,\lambda)$ — $t\in[a,b]$, $\lambda\in[c,d]$, причём $\max|g(t,\lambda)| \in L_2(d\mu_2)$. Тогда

$$\int_c^d\left[\int_a^b g(t,\lambda)\,d\eta_0(t)\right]d\lambda=\int_a^b\left[\int_c^d g(t,\lambda)\,d\lambda\right]d\eta_0(t)$$

Пусть $\eta(t)$ - белый шум с параметрами α и β. Тогда $d\eta(t)=\alpha dt+\beta d\eta_0(t)$, где $d\eta_0(t)$ — стандартный белый шум.

Положим по опред. $\int_a^b f(t)\,d\eta(t)=\alpha\int_a^b f(t)\,dt+\beta\int_a^b f(t)\,d\eta_0(t)$ $\forall f\in L_1 \cap L_2$.

Таким образом, интеграл обладает теми же свойствами, что и раньше, с поправкой на то, что:

$\mathbb{E}\left(\int_a^b f(t)\,d\eta(t)\right) = \alpha \int_a^b f(t)\,dt$. Например, $\mathbb{E}\left|\int_a^b f(t)\,d\eta(t)\right|^2 =$

$= |\alpha|^2 \left|\int_a^b f(t)\,dt\right|^2 + |\beta|^2 \int_a^b |f(t)|^2\,dt.$

ГЛАВА 7. Линейные стохастические дифф. уравнения.

12-к/р (4 или 3 ?)

§1 Стохастический дифференциал.

Пусть $d\eta$ - белый шум с параметрами α, β. Если $\Delta = [s,t)$, то $\mathbb{E}\,\Delta\eta = \alpha\Delta$, $\mathbb{D}\,\Delta\eta = \beta^2|\Delta|$. В этом случае, $d\eta = \alpha\,dt + \beta\,d\eta_0(t)$, где $d\eta_0(t)$ - стандартный белый шум. Всюду далее неслуч. ф-ии полагаются интегр. вместе с квадратом.

Опр. 1 Говорят, что сл. пр. $\xi(t)$ имеет стох. дифференциал

$$d\xi(t) = a(t)\,dt + b(t)\,d\eta_0(t), \quad t > t_0, \quad \text{если} \qquad (1)$$

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^t a(s)\,ds + \int_{t_0}^t b(s)\,d\eta_0(s), \quad \text{где } \xi_0 \text{ - некая с.в,} \qquad (2)$$

$a(t)$ - непр. в ср.кв. СП на $[a,b]$, $b(t)$ - неслучайная ф-я из $L_2(dt)$.

Лемма 1. Пусть $d\eta_0(t)$ - ст. бел.ш., $C(t,s)$, $t \geq s \geq t_0$ - некая неслучайная ф-я, для которой существует непр. по паре аргументов производная $\frac{dc(t,s)}{dt}$. Тогда С.П.

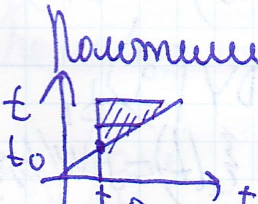
$$\xi(t) = \int_{t_0}^t c(t,s)\,d\eta_0(s) \text{ имеет стохастический диф.-л:} \qquad (3)$$

$$d\xi(t) = \left[\int_a^b \frac{d}{dt} C(t,s)\,d\eta_0\right] dt + C(t,t)\,d\eta_0(t) \qquad (4)$$

Д-во. Обозначим $a(t) = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} c(t,s)\,d\eta_0(s)$, $b(t) = c(t,t)$.

Д-м (2). Обозначим $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^v \frac{dc(t,v)}{dv}\,d\eta_0(s)\right] dv. \qquad (5)$

Положим $c(v,s) = \frac{d}{dv} c(v,s) = 0 \quad \forall s \geq v.$



Тогда $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{dc(v,s)}{dv}\,d\eta_0(s)\,dv =$

$$= \int_{t_0}^{t} \Big[\int_{t_0}^{t} \frac{dc(v,s)}{dv} dv \Big] dW_0(s) = \int_{t_0}^{t} \Big[\int_{s}^{t} \frac{dc(v,s)}{dv} dv \Big] dW_0(s) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} (c(t,s) - c(s,s))\, dW_0(s) \overset{(3)}{=} \xi(t) - \int_{t_0}^{t} c(s,s)\, dW_0(s).$$

Ч.Т.Д.

§2 Линейные стохастические дифф. уравнения.

В классическом анализе линейным однородным ДУ

(6) наз-ся $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$ или

(7) $dx(t) = a(t)x(t)\,dt$; в неоднородном случае,

(8) $dx(t) = a(t)x(t)\,dt + dy(t)$

Опр. Лин. стох. ДУ – урав-е вида

(9) $$\begin{cases} d\xi(t) = a(t)\xi(t) + b(t)\, dW_0(t), & t > t_0 \\ \xi(t_0) = \xi_0, \text{ где} \end{cases}$$

1) ξ_0 – некая с. в.;

2) $a(t)$, $b(t)$ – некие неслучайные ф-ии;

3) $dW_0(t)$ – стандартный белый шум.

Рассмотрим вспомогательное ДУ:

(10) $$\begin{cases} \frac{d}{dt} W(t,s) = a(t)W(t,s), & t \geq s \\ W(s,s) = 1. \end{cases}$$

$W(t,s)$ – фундаментальное решение для д-я.

(11) Тогда $W(t,s) = 1 + \int_{s}^{t} a(v)\, W(t,v)\, dv$, $t \geq s$.

Отметим, что $W(t,s) = W(t,v)W(v,s)$, $t \geq v \geq s$

(12) Рассмотрим С.П. $\xi(t) = W(t,t_0)\xi_0 + \int_{t_0}^{t} W(t,s)\, b(s)\, dW_0(s)$

Теорема Сл. пр. вида (12) есть решение СДУ (9).

Д-во. Обозначим $\xi_1(t) = W(t,t_0)\xi_0$; $\xi_2(t) = \int_{t_0}^{t} W(t,s)\, b(s)\, dW_0(s)$

$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) \Rightarrow d\xi(t) = d\xi_1(t) + d\xi_2(t)$

$d\xi_1 = \frac{d}{dt} W(t,t_0)\,dt \overset{(10)}{=} a(t)\,W(t,t_0)\,\xi_0\,dt = a(t)\xi(t)dt$

$d\xi_2 = d\left[\int_{t_0}^{t} \frac{W(t,s)\,b(s)\,dw_0(s)}{c(t,s)}\right] \overset{\text{лемма 1}}{=} \left[\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} W(t,s)\,b(s)\cdot\right.$

$\left.\cdot\, dw_0(s)\right]dt + W(t,t)\,b(t)\,dw_0(t) \overset{(10)}{=} a(t)\,\xi_2(t)\,dt + b(t)\,dw_0(t)$

$\Rightarrow d\xi(t) = a(t)\,\xi(t)\,dt + b(t)\,dw_0(t)$ И-прямая провер-ка: $\xi(t_0) = \xi_0$. ЧТ.Д

Замечание. Легко видеть, что $\xi(t) = W(t,s)\,\xi(s) + \int_{s}^{t} W(t,v)\,b(v)\,dw_0(v)$.

ЛЕКЦИЯ #12

28.04.1

12. – КР 4й курс

19 – КР 3й курс.

Пример. Решить СДУ: $\begin{cases} d\xi(t) = -\xi(t)\,dt + b(t)\,dw_0(t) \\ \xi(t_0) = \xi_0 \end{cases}$

$a(t) \equiv -1.$

Решим вспомогательные уравнение: $\begin{cases} \frac{dW(t,s)}{dt} = -1 \cdot W(t,s) \\ W(s,s) = 1. \end{cases} \Rightarrow \frac{dW}{W} = -dt$

$\ln W(t,s) = -t + c(s)$

$\ln W(s,s) = -s + c(s) = 0.$

$W(t,s) = e^{-(t-s)}, \quad t \geq s \quad \Leftarrow \quad c(s) = s$

Тогда $\xi(t)$ имеет вид: $\xi(t) = e^{-(t-t_0)}\,\xi_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)}\,b(s)\,dw_0(s)$

ГЛАВА 3. Спектральное разложение стационарных процессов

§1 Корреляционная функция и её свойства.

Всюду далее, $T = \mathbb{R}^1$ или $\mathbb{Z}^1$.

Опр. Сл. пр. $\xi(t), t \in T$ называется стационарным в широком (слабом) смысле, если

1) $\exists \mathbb{E}|\xi(t)| \overset{?}{<} \infty \ \forall t$

2) $\mathbb{E}\xi(t) = a(t) \equiv a \ \forall t$

3) $\forall t; \tau \in T$ $cov(\xi(t), \xi(t+\tau))$ есть ф-я только от τ; $= K(\tau)$ - кор. ф-я стационарного процесса.

Свойства:

1) $|K(\tau)| \leq K(0) = \mathbb{D}\xi(t) \quad \forall t \in T$.

2) Если процесс вещественный, то $K(\tau) = K(-\tau)$

3) $\forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ верно
$$\sum_{k,j=1}^{n} K(t_k - t_j) c_k \bar{c}_j > 0 \quad \text{(положит. опр. ф-я)}$$

4) $K(\tau)$ - непр. ф-я.

Можно д-ть, что $\forall$ ф-я, удовлетв. 1)-4), есть кор. фун. некоего стационарного процесса (в широком смысле)

Теорема (Бохнера-Хинчина) Пусть $K(\tau)$ есть к.ф. стационарного процесса. Тогда $K(\tau)$ имеет вид: $K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda)$, где $F(\lambda)$ - $\tau \in \mathbb{R}$. (1)

веществ. ф-я, т.ч.:

1) $F(\lambda)$ неубывающая;

2) $F(\lambda)$ ограничена;

3) $F(\lambda)$ непр. слева.

Замечания. 1) Если $\tau \in \mathbb{Z}$, то в формуле (1) интеграл по $[-\pi; +\pi]$

2) $F(\lambda)$ наз-ся спектральной функцией.

3) $F'(\lambda) = f(\lambda)$ - спектральная плотность, то

(2) $K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau} f(\lambda) d\lambda$

И, раз уж это преобразование Фурье, то $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau} K(\tau)\,d\tau$ (3)

$(\tau \in \mathbb{R})$. В дискр. случае, $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda} K(n)$ (4)

§2 Спектральное разложение стац. процесса.

п.1 Случайные колебания с дискр. спектром.

Пусть $t \in \mathbb{R}$. Р-м С.П.: $\xi(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k e^{i\lambda_k t}$, где: (5)

1) A_k – с.в., $\mathbb{E}(|A_k|^2) < \infty \;\forall k$.
2) $\mathbb{E}A_k = 0$
3) A_k некоррелированы.
4) λ_k неслучайные вещественные числа.

Тогда

1) $\mathbb{E}(|\xi(t)|^2) < \infty$;
2) $\mathbb{E}\xi(t) = 0 = const \;\forall t$;
3) $cov(\xi(t), \xi(t+\tau)) = \mathbb{E}(\xi(t)\cdot\overline{\xi(t+\tau)}) =$

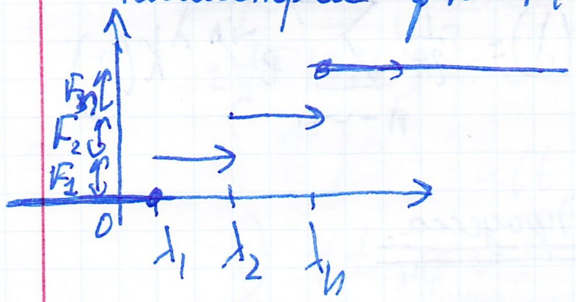
$= \mathbb{E}([\sum\limits_k A_k e^{i\lambda_k t}][\sum A_j e^{i\lambda_j(t+\tau)}]) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}|A_k|^2 e^{i\lambda_k(t-t-\tau)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}|A_k|^2 e^{-i\lambda_k\tau} = K(\tau)$

Мы получили стационарный процесс! Обозначим $\xi_k(t) = A_k e^{i\lambda_k t}$ – в тер. механике это наз-ся гармоническим колебанием с амплитудой A_k и частотой λ_k. Оттуда же известно, что мощность колебания пропорциональна $|A_k|^2$. Средняя энергия измеряется $\mathbb{E}|A_k|^2$. В физических системах, состоящих из нескольких частей если общая энергия равняется сумме энергий каждой из компонент, (нет энергии взаимодействия), то говорят, что система состоит из независимых компонент (в физическом смысле)

В нашем случае, $\mathbb{E}(|\xi(t)|^2) = \mathbb{D}(\xi(t)) = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{D}(A_k)}_{=F_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_k$

Рассмотрим ф-ю $F(\lambda)$:



Значит, $K(\tau) = cov(\xi(t+\tau)\xi(t)) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} F_k e^{i\lambda_k \tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau} d\underbrace{F(\lambda)}$$

какая доля энергии отв. колебанию, т.е. $F(\lambda)$ описывает распределение энергии $\xi(t)$ по гармоническим колебаниям вида $e^{i\lambda t}$. Колебания с различными λ в физическом смысле являются независимыми. (В стат. смысле, их амплитуды некоррелированы)

п.2 Спектральное разложение стац процесса.

Пусть $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ — стационарный сл. пр, и:

1) $\mathbb{E}\xi(t) = 0 \quad \forall t$

2) (см. 3)

3) $cov(\xi(t+\tau), \xi(t)) = K(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda)$ — представление Бохнера-Хинчина

$\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ рассмотрим с.в.:

(6) $c_1\xi(t_1) + \dots + c_n\xi(t_n) \Rightarrow H_0$ — линейное пространство с.в. такого вида.

Ясно, что $H_0 \subset H_2$. Обозначим $\overline{H_0} = H$ — линейное преобразование $\xi(t)$. Обозначим через $L_2(dF)$ гильбертово пространство

(7) $g(\lambda)$: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty$ со скалярным произведением:

(8) $(g_1, g_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_1(\lambda) \overline{g_2(\lambda)} \, dF(\lambda)$

~~(9)~~ $\|g\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 dF(\lambda)$

Теорема. (Спектральное разложение стац. проц.) Пусть $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, — стац. процесс с кор. ф-ей $K(\tau)$ вида (1) и $\mathbb{E}\xi(t) = 0 \ \forall t$. Тогда $\exists$ сл. пр. $Z(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

со св-ми:

1) $E|z(\lambda)|^2 < \infty \ \forall \lambda$.

2) $E(z(\lambda)) = 0 \ \forall \lambda$.

3) $z(\lambda)$ непр. слева в ср. кв.;

4) $z(\lambda)$ имеет некор. приращения. (СОМ)

5) Если $\lambda_1 < \lambda_2$, то $E|z(\lambda_2) - z(\lambda_1)|^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$.

Тогда между пр-ви H и $L_2(dF)$ существует взаимно-однозначное соответствие, которое линейно и сохр. скал. пр. Более того, оно задаётся по правилу: $L_2(dF) \ni g \leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, dz(\lambda)$. В частности, если $g(\lambda) = c_1 e^{i\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{i\lambda_n t}$ (9)

$n=1$, $\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, dz(\lambda)$ – спектр. разложение $\xi(t)$ (10)

ЛЕКЦИЯ #13

05.05.10

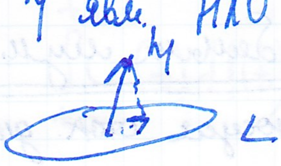
§3 Наилучшие линейные оценки для с.п.

п.1 Задача о наилучшей линейной оценке.

Пусть $\mathcal{L} \subset H_2$ – зам. лин. подпр-во.

Опр. Наилучшей лин. оценкой (НЛО) для $\eta \in H_2$ в пр-ве $\mathcal{L}$ наз-ся $\hat{\eta}$: 1) $\hat{\eta} \in \mathcal{L}$.
2) $\forall \xi \in \mathcal{L}$ $\|\eta - \hat{\eta}\|^2 = E|\eta - \hat{\eta}|^2 \le \|\eta - \xi\|^2$

Лемма о перпен. $\hat{\eta}$ явл. НЛО для η $\Leftrightarrow$ 1) $\hat{\eta} \in \mathcal{L}$
2) $\langle \eta - \hat{\eta}, \xi \rangle = 0 \ \forall \xi \in \mathcal{L}$.



Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \xi_0 \subset H_2$ – гиперплоскость ($\xi_0 \in H_2$, $\mathcal{L}_0$ – замк. лин. подпр-во).

Лемма о П.П. $\hat{\eta}$ – НЛО в гиперплоскости $\mathcal{L}$ для η, если: 1) $\hat{\eta} \in \mathcal{L}$

$$2)\ (\eta-\hat{\eta}, \xi-\hat{\eta}) = 0\ \forall \xi \in \mathcal{L}.$$

п.2 Классификация о НЛО для СП.

1) Задача интерполяции.

$T=[a,b]$ – конечный отрезок; $a=t_0<\ldots<t_n=b$.

С.П. $\xi(t)$ наблюдается в t_k, $k=\overline{0,n}$. Пусть $t\in[a,b]$, $t\neq t_k$; хотим оценить $\xi(t)$. Пусть $\mathcal{L}$–пр-во с.в. вида $c_0\xi(t_0)+\ldots+c_n\xi(t_n)$, $\hat{\xi}$–НЛО ξ в $\mathcal{L}$.

2) Линейная экстраполяция (линейный прогноз)

Пусть $\xi(t)$ набл. $\forall t\in[t_0,t_1]$ и $t_2\notin[t_0,t_1]$, $t_2>t_1$. Необходимо оценить $\xi(t_2)$. Пр-во $\mathcal{L}$ состоит из сл. вел. вида $\int\limits_{t_0}^{t_1} c(t)\xi(t)\,dt$

3) Задача фильтрации. Наблюдается с.п. $\xi(t)$, $t\in[t_1,t_2]$ вида $\xi(t)=f(t,\eta(t),\theta(t))$, где 1) $f(t,x,y)$–изв. ф-я;

2) $\theta(t)$– ненаблюдаемый полезный сигнал

3) $\eta(t)$ – шум (помеха)

Необходимо по наблюдениям $\xi(t)$ на $[t_1,t_2]$ оптимально оценить полезный сигнал $\theta(t)$ в лин. пр-ве $\mathcal{L}$ вида $\int\limits_{t_1}^{t_2} c(t)\xi(t)\,dt$. Частный случай: $\xi(t)=\theta(t)+\eta(t)$

п.3 Выделение полезного сигнала из смеси с белым шум.

Наблюдается с.п. $\xi(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, имеющая стох. дифф.

(1) $d\xi(t)=\theta(t)dt+d\eta_0(t)$, где θ–полезный сигнал, η_0–белый шум

(2) Предположим, что $\theta(t)=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\varphi_k(t)$, где 1) $\varphi_k(t)$–изв. неслуч. ф-ии 2) α_k–неизв. парам.

Задача. Найти опт. оценку для $\theta(t)$ по набл. $\xi(t)$. В силу (2), д-но оценить α_k.

Пусть $\mathcal{L}_k$ - линейные несмещенные оценки для α_k вида $\eta = \int_{t_0}^{t_1} c(t)\, d\xi(t) =$
$= \int_{t_0}^{t_1} c(t)\theta(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} c(t)\, d\eta_0(t)$.

Несмещенность: $\mathbb{E}\eta = \alpha_k$. Условие несмещенности: (4)

$$\mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{t_1} c(t)\, d\xi(t)\right) = \int_{t_0}^{t_1} c(t)\theta(t)\, dt = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{t_0}^{t_1} c(t)\varphi_j(t)\, dt \overset{\text{д-но}}{=} \alpha_k$$

Значит, $\int_{t_0}^{t_1} c_k(t)\varphi_j(t)\, dt = \delta_{kj}$ (5)

c_k — "отвечающая k"

Обозначим $b_{ij} = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_i(t)\varphi_j(t)\, dt$; $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij}) = B^{-1}$

Теорема. Оптимальная оценка $\hat{\alpha}_k$ имеет вид (3) с весовой функцией $c_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\varphi_j(t)$ (7)

Д-во. П-м, что $c_k(t)$ удв. (5): $\int_{t_0}^{t_1} c_k(t)\varphi_m(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} c_{kj} \cdot$
$\cdot \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\varphi_j(t)\varphi_m(t)\, dt}_{b_{jm}} = \delta_{jm}$. Применим лемму о перпендикуляре: $\hat{\alpha}_k$ - НЛО $\Leftrightarrow \forall \eta \in \mathcal{L}_k$ $(\alpha_k - \hat{\alpha}_k, \eta - \hat{\alpha}_k) = 0$ или

$(\alpha_k - \hat{\alpha}_k, \eta) = (\alpha - \hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_k)$. Вычислим $(\alpha_k - \hat{\alpha}_k, \eta) = \mathbb{E}\Big([\alpha_k -$ (8)
$- \int_{t_0}^{t_1} c_k(t)\, d\xi(t)][\int_{t_0}^{t_1} c(t)\, d\xi(t)]\Big) \overset{(3)}{=} \mathbb{E}\Big([\alpha_k - \hat{\alpha}_k]\int_{t_0}^{t_1} c(t)\theta(t)\, dt$
$+ \mathbb{E}\Big([\alpha_k - \hat{\alpha}_k][\int_{t_0}^{t_1} c(t)\, d\eta_0(t)]\Big) = 0 + \alpha_k \mathbb{E}\Big(\int_{t_0}^{t_1} c(t) \overset{=0}{d}\eta_0(t)\Big)$
$- \mathbb{E}\Big[\int_{t_0}^{t_1} c_k(t)\theta(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} c_k(t)\, d\eta_0(t)\Big]\Big[\int_{t_0}^{t_1} c(t)\, d\eta_0(t)\Big] =$

В листке ошибка!!!

$$= -0- \int_{t_0}^{t_1} c_k(t)\, c(t)\, dt \overset{(7)}{=} - \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \int_{t_0}^{t_1} e_j(t)\, c(t)\, dt =$$

$$\overset{(5)}{=} - \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, \delta_{jk} = -c_{kk}.$$ $\forall\, c(t)$ вида (3) И-мы в лемме.

Ч.Т.Д.

Задача. $d\xi(t) = \theta(t)\,dt + d\eta_0(t)$, $\boxed{t \in [0, \pi]}$!

$$\theta(t) = \alpha_1 \underbrace{\sin t}_{\varphi_1} + \alpha_2 \underbrace{\cos t}_{\varphi_2}$$

1) Вычислим b_{ij}. $b_{11} = \int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{\pi}{2} = b_{22}$

$$b_{12} = b_{21} = \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos t\, dt = 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} \pi/2 & 0 \\ 0 & \pi/2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2/\pi & 0 \\ 0 & 2/\pi \end{pmatrix}$$

$$c_1(t) = \sum_{j=1}^{2} c_{1j}\, \varphi_j(t) = \frac{2}{\pi} \sin(t)$$

$$c_2(t) = \frac{2}{\pi} \cos t$$

Ответ:

$$\hat{\alpha}_1 = \int_0^{\pi} c_1(t)\, d\xi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t)\, d\xi(t)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t)\, d\xi(t)$$

КОНЕЦ